Pembahasan OSK Matematika SMA 2024

Arshanada Putranta
Bryant Tan
Darren Tan
Raymond Christopher Tanto
Yoshua Yonatan Hamonangan

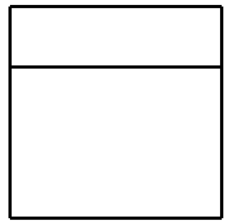
26 Maret 2024

Catatan: Ada beberapa versi soal yang angka-angkanya berbeda dari yang kami tuliskan di sini. Jadi, caranya tinggal disesuaikan ke angka masing-masing.
Untuk saran, kesalahan solusi, dan masukan bisa disampaikan dengan mengontak IG pribadi penulis:

Arshanada Putranta :@*arshanada*
Bryant Tan :@*comrade_bryant*
Darren Tan :@*dt.dttttt*
Raymond Christopher Tanto :@*raymond_loves_math*
Yoshua Yonatan Hamonangan :@*yoshuayonatan*

Pembahasan Kemampuan Dasar

1. Sebuah persegi dibagi menjadi 2 persegi panjang, seperti terihat pada gambar. Diketahui hasil penjumlahan kedua keliling persegi panjang tersebut adalah 60, maka luas persegi adalah ...



   Solusi : Misalkan sisi persegi tersebut adalah s dan lebar persegi panjang yang atas adalah a. Maka, lebar persegi panjang yang bawah adalah $s-a$. Keliling persegi panjang yang atas adalah $2s+2a$ dan keliling persegi panjang yang bawah adalah $2s+2(s-a)=4s-2a$. Maka, total keliling kedua persegi panjang tersebut adalah $6s=60 \implies s=10$. Jadi, luas persegi tersebut adalah $10\times 10 = \boxed{100}$.

2. Diketahui ada 6 pilihan jalan yang dapat digunakan untuk berpergian dari kota A ke kota B dan ada 8 pilihan jalan yang dapat digunakan untuk berpergian dari kota B ke kota C. Jika seseorang akan berpergian dari kota A ke kota C melalui kota B dan pulang kembali lagi ke kota A melalui jalan-jalan yang berbeda dari ketika saat pergi, banyaknya cara memilih jalan yang dapat dilalui adalah ...

   Solusi : Perhatikan bahwa untuk berpergian dari kota A ke kota C melalui kota B adalah 6×8 cara. Lalu, untuk berpergian dari kota C ke kota A melalui kota B tanpa melalui jalan yang sama adalah $(8-1)\times(6-1)=7\times 5$. Jadi, banyaknya cara adalah $6\times 8\times 7\times 5=\boxed{1680}$.

3. Pada papan tertulis 90 bilangan asli $1,1,\ldots,1,a,b$ (ada sebanyak 88 bilangan 1). Hasil penjumlahan seluruh bilangan di papan adalah A dan demikian juga hasil perkalian semua bilangan di papan adalah A. Nilai A adalah ...

   Solusi : Perhatikan bahwa $A=88+a+b$ dan juga $A=ab$, sehingga $88+a+b=ab \iff 89 = 1-a-b+ab=(a-1)(b-1)$. Karena 89 merupakan bilangan prima, maka $(a,b)=(2,90)$ atau $(90,2)$ sehingga $a+b=92 \implies A=88+92=\boxed{180}$.

4. Misalkan a,b bilangan bulat positif yang tidak memiliki faktor persekutuan positif selain 1. Jika berlaku $\dfrac{1+2+3+\cdots+104}{3+4+5+\cdots+106}=\dfrac{a}{b}$, maka nilai $a+b$ adalah ...

   Solusi : Perhatikan bahwa

$$\frac{1+2+3+\cdots+104}{3+4+5+\cdots+106}=\frac{1+2+3+\cdots+104}{1+2+3+4+5+\cdots+104+104+104}=\frac{\frac{104\cdot 105}{2}}{\frac{104\cdot 105}{2}+2\cdot 104}=\frac{\frac{104\cdot 105}{2}}{\frac{109\cdot 104}{2}}=\frac{105}{109}$$

   Jadi, $a+b=\boxed{214}$.

5. Bilangan OSK adalah bilangan 4 angka yang tidak dimulai dengan angka 0 dan hasil penjumlahan semua digitnya adalah 8. Sebagai contoh, 2024 merupakan bilangan OSK. Banyaknya bilangan OSK adalah ...

   Solusi : Misalkan bilangan 4 digitnya adalah $\overline{abcd}$. Maka, berlaku $a+b+c+d = 8$ dan $a \geq 1, b, c, d \geq 0$. Misalkan $a' = a-1$, maka $a'+b+c+d = 7$ dan $a', b, c, d \geq 0$. Sehingga, dengan *stars and bars*, banyak pasangan (a', b, c, d) adalah $\binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = \boxed{120}$.

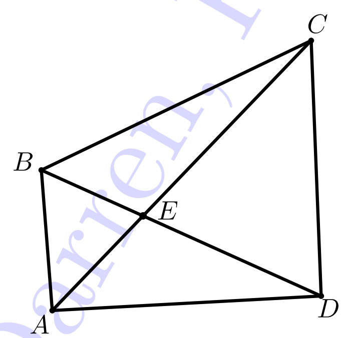
6. Misalkan $u_1, u_2, u_3, \ldots$ suatu barisan geometri dengan $u_1 > u_2$. Jika $u_2 = 8$ dan $u_5 + u_7 = \dfrac{17u_6}{4}$. Nilai dari u_1 adalah ...

   Solusi : Misalkan $u_n = ar^{n-1}$. Karena $u_1 > u_2$, maka $r < 1$.

$$u_5 + u_7 = \frac{17u_6}{4} \implies 4ar^4(1+r^2) = 17ar^5 \implies 4r^2 - 17r + 4 = 0 \implies (4r-1)(r-4) = 0$$

   Karena $r < 1$, maka $r = \frac{1}{4}$. Dari $u_2 = 8$, maka $u_1 = a = \dfrac{u_2}{r} = \boxed{32}$.

7. Diberikan segiempat $ABCD$ dengan luas segitiga AED sama dengan luas segitiga BEC. Jika $AB = 50$, $AE = 45$, dan $AC = 108$, maka CD adalah ...



   Solusi : Perhatikan bahwa

$$L_{AED} = L_{BEC} \implies \frac{1}{2} \times AE \times ED \times \sin AED = \frac{1}{2} \times BE \times EC \times \sin BEC \implies AE \times ED = BE \times EC$$

   Misalkan $BE = 45x$, maka $ED = 63x$. Lalu, perhatikan bahwa $\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{ED}{EC}$ dan $\angle BEA = \angle DEC$. Maka, $\triangle BEA \sim \triangle DEC$. Jadi,

$$\frac{BE}{BA} = \frac{ED}{DC} \implies \frac{45x}{50} = \frac{63x}{DC} \implies CD = \boxed{70}$$

8. Banyak bilangan dua digit $\overline{ab}$ dengan $a, b \neq 0$ sehingga $\overline{ab} + \overline{ba}$ merupakan kelipatan 66 adalah ...

   Solusi : Perhatika bahwa $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + a + 10b = 11(a+b) = 66k \implies a + b = 6k$ untuk k bilangan bulat positif. Karena $a, b \leq 9$, maka $k \leq 3$.

   - Kasus 1 : $a + b = 6$. $(a, b) = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$. Ada 5 pasang (a, b) pada kasus ini.
   - Kasus 2 : $a + b = 12$. $(a, b) = \{(3,9), (4,8), (5,7), (6,6), (7,5), (8,4), (9,3)\}$. Ada 7 pasang (a, b) pada kasus ini.
   - Kasus 3 : $a + b = 18$. $(a, b) = (9, 9)$. Ada 1 pasang (a, b) pada kasus ini

   Banyak bilangan dua digit yang memenuhi adalah $5 + 7 + 1 = \boxed{13}$

9. Misalkan k adalah bilangan bulat positif terkecil kelipatan 2024 yang memiliki 28 faktor positif. Sisa hasil bagi k oleh 100 adalah ...

   Solusi : Perhatikan bahwa $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$. Banyak faktor dari 2024 ada $(3+1)(1+1)(1+1) = 4 \times 2 \times 2 = 16$ faktor. Perhatikan bahwa jika ada bilangan prima lain selain $2, 11$, dan 23 yang membagi k, maka banyak faktor minimal dari k adalah $16 \times 2 = 32 > 28$, sehingga, tidak mungkin ada bilangan prima lain $2, 11$, dan 23.

   - Kasus 1: Jika $k = 11^x \cdot 2024$ atau $k = 23^x \cdot 2024$ untuk x bilangan bulat positif, maka banyak faktor k adalah $(3+1) \cdot \{(1+x)+1\} \cdot (1+1) = 16 + 8x = 28 \implies x = \frac{3}{2}$. Karena x bukan bilangan bulat, maka kasus ini tidak memenuhi.
   - Kasus 2: Jika $k = 2^x \cdot 2024$ untuk x bilangan bulat positif, maka banyak faktor k adalah $\{(3+x)+1\} \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16 + 4x = 28 \implies x = 3$. Nilai k yang memenuhi adalah $2^3 \cdot 2024$

   Maka,

$$\begin{aligned} k &\equiv 8 \cdot 24 \pmod{100} \\ &\equiv 192 \pmod{100} \\ &\equiv \boxed{92} \pmod{100} \end{aligned}$$

10. Misalkan x, y bilangan real positif dengan $x > y$. Jika diketahui bahwa $x^2 + y^2 = \left(\frac{545}{272}\right)xy$, maka $\frac{x+y}{x-y}$ adalah ...

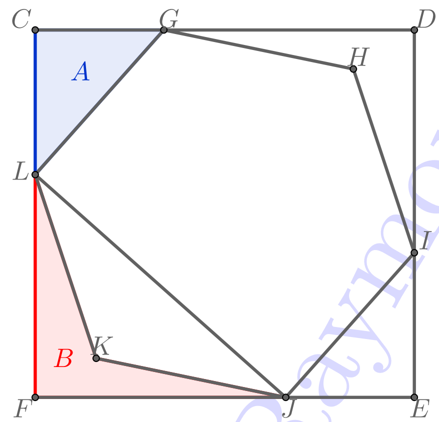
    Solusi : Perhatikan bahwa $(x+y)^2 = \left(\frac{545}{272} + 2\right)xy = \left(\frac{1089}{272}\right)xy = \left(\frac{33^2}{272}\right)xy$ dan $(x-y)^2 = \left(\frac{545}{272} - 2\right)xy = \left(\frac{1}{272}\right)xy$. Maka,

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = 33^2 \implies \frac{x+y}{x-y} = \boxed{33}$$

Pembahasan Kemampuan Lanjut

11. Suatu segienam beraturan disisipkan kedalam sebuah persegi panjang seperti terlihat pada gambar dibawah ini. Jika luas A dan B berturut-turut adalah 24 dan 23, maka luas segienam beraturan adalah ...

Solusi : Perhatikan gambar berikut ini.



Misalkan panjang sisi segienam adalah s. Misalkan $\angle CLG = \alpha$. Karena $\angle JLG = 90^\circ$, maka $\angle FJL = 90^\circ - \angle JLF = \alpha$. Maka, $\triangle CGL \sim \triangle FLJ$ dan $LJ = s\sqrt{3}$ yang didapat dari aturan cos pada segitiga LKJ. Karena $\triangle CGL \sim \triangle FLJ$, maka $[\triangle CGL] : [\triangle FLJ] = GL^2 : LJ^2 = 1 : 3 = 24 : 72$. Perhatikan bahwa $[\triangle JLK] = [FLJ] - B = 49$, maka

$$\frac{1}{2} \cdot s \cdot s \cdot sin 120^\circ = 49 \implies \frac{s^2\sqrt{3}}{4} = 49 \implies s^2\sqrt{3} = 196$$

Perhatikan bahwa $[JLK] = [IGH]$, maka luas segienam adalah $2 \cdot [JLK] + [GLJI] = 2 \cdot 49 + s^2\sqrt{3} = \boxed{294}$

12. Banyak himpunan bagian A dari $\{24, 25, 26, \ldots, 35\}$ sehingga hasil penjumlahan unsur terbesar dan terkecil dari A sama dengan 59 adalah ...

Solusi : Perhatikan bahwa 59 dapat dinyatakan sebagai $24 + 35$, $25 + 34$, ..., $29 + 30$.

- Kasus 1 : Saat unsur terkecil dan terbesarnya adalah 24 dan 35. Perhatikan bahwa angka-angka $25, 26, \ldots, 34$ bebas ada di A atau tidak ada di A. Sehingga, banyak himpunan A yang mungkin pada kasus ini adalah 2^{10}.
- Kasus 2 : Saat unsur terkecil dan terbesarnya adalah 25 dan 34. Perhatikan bahwa angka-angka $26, 27, \ldots, 33$ bebas ada di A atau tidak ada di A. Sehingga, banyak himpunan A yang mungkin pada kasus ini adalah 2^8.
- Kasus 3 : Saat unsur terkecil dan terbesarnya adalah 26 dan 33. Perhatikan bahwa angka-angka $27, 28, \ldots, 32$ bebas ada di A atau tidak ada di A. Sehingga, banyak himpunan A yang mungkin pada kasus ini adalah 2^6.
- Kasus 4 : Saat unsur terkecil dan terbesarnya adalah 27 dan 32. Perhatikan bahwa angka-angka $28, 29, 30, 31$ bebas ada di A atau tidak ada di A. Sehingga, banyak himpunan A yang mungkin pada kasus ini adalah 2^4.

- Kasus 5 : Saat unsur terkecil dan terbesarnya adalah 28 dan 31. Perhatikan bahwa angka-angka $29, 30$ bebas ada di A atau tidak ada di A. Sehingga, banyak himpunan A yang mungkin pada kasus ini adalah 2^2.
- Kasus 6 : Saat unsur terkecil dan terbesarnya adalah 29 dan 30, hanya ada 1 himpunan A yang memenuhi pada kasus ini, yaitu $\{29, 30\}$

Jadi, total himpunan bagian A yang mungkin adalah $2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = \boxed{1365}$.

13. Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $f(n)$ menyatakan faktor ganjil terbesar dari n dan $p(n) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$. Jika $p(n) = 8145$, maka n adalah ...

Solusi : Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} p(n+1) - p(n) &= f(2n+2) + f(2n+1) - f(n) \\ &= f(n+1) - f(n) + 2n + 1 \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n) - p(n-1) + p(n-1) - p(n-2) + \ldots + p(2) - p(1) + p(1) \\ &= (f(n) - f(n-1) + 2n - 1) + (f(n-1) - f(n-2) + 2n - 3) + \ldots + (f(2) - f(1) + 3) + p(1) \\ &= f(n) - f(1) + (3 + 5 + \ldots + 2n - 1) + p(1) \\ &= f(n) + (1 + 3 + \ldots + 2n - 1) \\ &= f(n) + n^2 \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} n^2 &< p(n) \leq n^2 + n \\ n^2 &< 8145 \leq n(n+1) \end{aligned}$$

Mudah dicek $n = 90$. Dan dapat dicek bahwa $p(90) = f(90) + 90^2 = 45 + 8100 = 8145$ memenuhi soal.

Sehingga, nilai n yang memenuhi adalah $\boxed{90}$

Solusi Alternatif : Perhatikan bahwa nilai $f(m)$ selalu ganjil untuk setiap m. Karena $p(n)$ ganjil, maka $2n - n + 1 = n + 1$ ganjil sehingga n genap. Misalkan $n = 2k$ dan sadari bahwa saat m genap, $1 \leq f(m) \leq \frac{m}{2}$. Tinjau nilai maksimum dan minimum dari $p(n)$.

$$\begin{aligned} p(n) &\leq \frac{n}{2} + n + 1 + \frac{n+2}{2} + n + 3 + \ldots + \frac{2n}{2} \\ p(n) &\leq \left(\frac{n}{2} + \frac{n+2}{2} + \ldots + \frac{2n}{2}\right) + ((n+1) + (n+3) + \ldots + (2n-1)) \\ p(n) &\leq (k + (k+1) + \ldots + 2k) + ((2k+1) + (2k+3) + \ldots + (4k-1)) \\ p(n) &\leq \frac{3k(k+1)}{2} + 3k^2 = \frac{9k^2 + 3k}{2} \end{aligned}$$

Sehingga $9k^2 + 3k \geq 8145 \cdot 2 = 16280 \implies k \geq 43$. Lalu,

$$\begin{aligned}
p(n) &\geq 1 + (n+1) + 1 + (n+3) + \ldots + (2n-1) + 1 \\
p(n) &\geq k + 1 + ((2k+1) + (2k+3) + \ldots + (4k-1)) \\
p(n) &\geq 3k^2 + k + 1
\end{aligned}$$

Sehingga $3k^2 + k + 1 \leq 8145 \implies k \leq 51$. Maka, diketahui $43 \leq k \leq 51$. Dengan menguli setiap nilai k yang memenuhi, mudah didapat bahwa $k = 45 \implies n = \boxed{90}$.

14. Diberikan suku banyak $P(x) = x^3 + Dx^2 + Ex + 1$ dan $P(-1) = 4$. Jika a, b, c merupakan akar-akar dari $P(x) = 0$ dan memenuhi $(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) = 40$. Maka nilai dari $(D+E)^2$ adalah ...

    Solusi : Perhatikan bahwa $P(-1) = -1 + D - E + 1 = 4 \implies D = E + 4$. Lalu, dengan Vieta, didapat bahwa $a + b + c = -(E+4)$, $ab + bc + ca = E$, $abc = -1$. Lalu, sadari bahwa

$$a^2 - bc = a^2 + \frac{1}{a} \text{ dan } a^3 + Da^2 + Ea + 1 = 0 \implies a^2 - bc = a^2 + \frac{1}{a} = -Da - E$$

    Maka,

$$\begin{aligned}
(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) &= -(Da + E)(Db + E)(Dc + E) \\
40 &= -D^3abc - D^2E(ab + bc + ca) - DE^2(a + b + c) - E^3 \\
40 &= D^3 - D^2E^2 + D^2E^2 - E^3 \\
40 &= (D - E)(D^2 + DE + E^2) \\
10 &= (4 + E)^2 + (4 + E)E + E^2 \\
10 &= 16 + 12E + 3E^2 \implies E^2 + 4E = -2
\end{aligned}$$

    Maka, $(D+E)^2 = (2E+4)^2 = 4(E^2 + 4E + 4) = 4 \cdot 2 = \boxed{8}$.

15. Banyaknya barisan bilangan bulat positif dengan enam suku $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ yang mungkin sehingga $1 \leq a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \leq 4$ dan tidak ada dua suku berurutan yang jumlahnya 4 adalah ...

    Solusi : Definisikan $f_k(n) =$ banyak barisan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yang memenuhi soal dengan $a_1 = k$ dan $S_n = f_1(n) + f_2(n) + f_3(n) + f_4(n)$.

$$\begin{aligned}
f_4(n) &= f_1(n-1) + f_2(n-1) + f_3(n-1) + f_4(n-1) \\
f_3(n) &= f_2(n-1) + f_3(n-1) + f_4(n-1) \\
f_2(n) &= f_1(n-1) + f_3(n-1) + f_4(n-1) \\
f_1(n) &= f_1(n-1) + f_2(n-1) + f_4(n-1)
\end{aligned}$$

Sehingga,

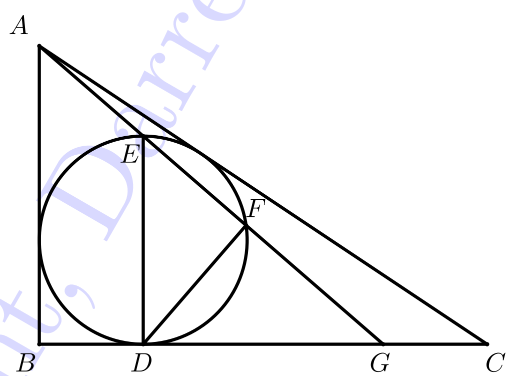
$$\begin{aligned}
f_1(n)+f_2(n)+f_3(n)+f_4(n) &= 3(f_1(n-1)+f_2(n-1)+f_3(n-1)+f_4(n-1))+f_4(n-1)\\
S_n &= 3S_{n-1}+(f_1(n-2)+f_2(n-2)+f_3(n-2)+f_4(n-2))\\
S_n &= 3S_{n-1}+S_{n-2}
\end{aligned}$$

Karena $S_1 = 4$ dan $S_2 = 13$, maka

$$\begin{aligned}
S_3 &= 3(13)+4 = 43\\
S_4 &= 3(43)+13 = 142\\
S_5 &= 3(142)+43 = 469\\
S_6 &= 3(469)+142 = \boxed{1549}
\end{aligned}$$

16. Diberikan sebuah segitiga ABC yang siku-siku pada sudut B. Lingkaran ω merupakan lingkaran dalam segitiga ABC yang menyinggung sisi BC pada titik D. Titik E terletak pada ω sehingga DE merupakan diameter dari ω. Perpanjangan garis AE memotong ω kedua kalinya pada titik F, dan memotong sisi BC pada titik G. Apabila $EF = 3$, dan $FG = 4$, maka panjang AE dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p\sqrt{q}}{r}$, dengan p,q,r merupakan bilangan bulat positif, satu-satunya faktor kuadrat dari q adalah 1, dan FPB(p,r)=1. Nilai dari $p+q+r$ adalah ...

Solusi : Misalkan R adalah jari-jari ω



Karena DE diameter ω, maka $\angle DFE = 90°$ dan $\angle EDG = 90°$. Maka $ED \perp BC$ dan $DF \perp EG$. Dari segitiga $\Delta EFD \sim \Delta DFG$, maka $\frac{EF}{FD} = \frac{FD}{FG} \implies FD = \sqrt{EF \times FG} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{12}$. Maka,

$$\begin{aligned}
ED &= \sqrt{DF^2+FE^2} = \sqrt{12+3^2} = \sqrt{21}\\
DG &= \sqrt{FD^2+FG^2} = \sqrt{12+4^2} = 2\sqrt{7}
\end{aligned}$$

Karena ED diameter ω, maka $R = \frac{ED}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Karena $ED \perp BC$, maka $AB \parallel ED$. Karena ω

menyinggung AB, maka jelas $BD = R = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$. Lalu, karena $\Delta GBA \sim \Delta GDE$, maka

$$\begin{aligned} \frac{GA}{GB} &= \frac{GE}{GD} \\ \frac{AE+7}{\frac{\sqrt{21}}{2}+\sqrt{28}} &= \frac{7}{\sqrt{28}} \\ AE\sqrt{28}+7\sqrt{28} &= \frac{7\sqrt{21}}{2}+7\sqrt{28} \\ AE &= \frac{7\sqrt{21}}{2\sqrt{28}} \\ AE &= \frac{7\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Maka, $p = 7, q = 3, r = 4$ dengan $p + q + r = \boxed{14}$

17. Diketahui a, b, c bilangan real positif yang memenuhi $a + b + c = \dfrac{32}{a} + \dfrac{32}{b} + \dfrac{32}{c} = 24$. Nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $\dfrac{a^2+32}{a}$ adalah ...

Solusi I: Perhatikan bahwa dari CS-Engel, kita punya

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{a} + \frac{(1+1)^2}{b+c} = \frac{1}{a} + \frac{4}{24-a} = \frac{24+3a}{24a-a^2}$$

Maka, didapat

$$72a - 3a^2 \geq 96 + 12a \implies 60a \geq 3a^2 + 96 \implies 20 \geq \frac{a^2+32}{a}$$

Kesamaan di CS-engel saat $b = c$, maka kesamaan saat

$$(a, b, c) = (10 + 2\sqrt{17}, 7 - \sqrt{17}, 7 - \sqrt{17}) \text{ atau } (a, b, c) = (10 - 2\sqrt{17}, 7 + \sqrt{17}, 7 + \sqrt{17})$$

Sehingga, nilai maksimal dari $\dfrac{a^2+32}{a}$ adalah $\boxed{20}$

Solusi II : Misalkan $X = \dfrac{a^2+32}{a} = a + \dfrac{32}{a}$. Dari persamaan di soal, didapat bahwa

$$a + b + c = 24 \iff a = 24 - (b + c)$$

$$\frac{32}{a} + \frac{32}{b} + \frac{32}{c} = 24 \iff \frac{32}{a} = 24 - \left(\frac{32}{b} + \frac{32}{c}\right)$$

Sehingga, $X + \left(b + c + \frac{32}{b} + \frac{32}{c}\right) = 48 \iff \left(b + c + \frac{32}{b} + \frac{32}{c}\right) = 48 - X$. Lalu,

$$\begin{aligned}
a \cdot \frac{32}{a} &= (24 - (b + c))\left(24 - \left(\frac{32}{b} + \frac{32}{c}\right)\right) \\
32 &= 576 - 24\left(b + c + \frac{32}{b} + \frac{32}{c}\right) + 32 + 32 + 32\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \\
32 &= 640 - 24(48 - X) + 32\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \\
32 &= -512 + 24X + 32\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)
\end{aligned}$$

Dengan AM-GM, $32\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 64$ dimana kesamaan terjadi saat $b = c$. Maka, $24X = 544 - 32\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \leq 544 - 64 = 480 \implies X \leq 20$ sehingga nilai maksimum dari X adalah $\boxed{20}$ dimana $(a, b, c) = (10 \pm 2\sqrt{17}, 7 \mp \sqrt{17}, 7 \mp \sqrt{17})$.

18. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Sebagai contoh $\lfloor 1,1 \rfloor = 1, \lfloor 3 \rfloor = 3$, dan sebagainya. Jika ada tepat sebanyak 1000 bilangan berbeda pada barisan

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3^2}{2024} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor$$

Maka n adalah ...

Solusi : Perhatikan untuk $n \geq 1013$, nilai $n^2 = (n-1)^2 + a$ dengan $a = n + (n-1) \geq 2025 > 2024$. Dari pernyataan sebelumnya, kita ketahui bahwa $\left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{2024} + \frac{a}{2024} \right\rfloor$ di mana $\frac{a}{2024} > 1$ sehingga setiap nilai $\left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor$ akan berbeda . Perhatikan juga untuk $n \leq 1012$, nilai $n^2 = (n-1)^2 + a$ dengan $a = n + (n-1) \leq 2022 < 2024$. Dari pernyataan sebelumnya, kita ketahui bahwa $\left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{2024} + \frac{a}{2024} \right\rfloor$ di mana $\frac{a}{2024} < 1$ sehingga terdapat nilai 0 hingga $\frac{1012^2}{2024} = 506$ untuk $\left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor$ dengan nilai n dari 1 hingga 1012. Maka nilai n adalah $1012 + (1000 - 506 - 1) = \boxed{1505}$

19. Banyaknya pemetaan $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sehingga $f(f(x)) \in \{2, 4\}$ untuk setiap $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah ...

Solusi : Definisikan notasi $Im(f)$ sebagai himpunan semua bilangan $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ yang memiliki prapeta

- Kasus 1 : $|Im(f)| = 1$: f merupakan fungsi konstan, maka ada dua solusi yaitu $f(x) = 2$ untuk setiap $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $f(x) = 4$ untuk setiap $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Kasus 2 : $|Im(f)| = 2$:
  - Subkasus 1: Jika $Im(f) = a, b$ dengan $a \in \{2, 4\}$ dan $b \in \{1, 3, 5\}$.
    WLOG $a = 2, b = 1$.
    Maka $f(f(x)) = 2$ untuk setiap x ,maka $f(1) = f(2) = 2$. Lalu, nilai $f(3), f(4), f(5)$ bisa dipilih dari himpunan $\{1, 2\}$, dengan syarat 1 memiliki prapeta. Maka ada $2^3 - 1 = 7$ fungsi yang

memenuhi.

$\therefore$ Pada subkasus ini ada $\binom{2}{1}\binom{3}{1}7 = 42$ fungsi yang memenuhi

- Subkasus 2: Jika $Im(f) = \{2,4\}$

  nilai $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ dipilih dari $\{2,4\}$ dengan syarat 2 dan 4 memiliki prapeta. Maka ada $2^5 - 2 = 30$ fungsi yang memenuhi.

  $\therefore$ pada subkasus ini ada 30 fungsi yang memenuhi.

- Kasus 3 : $|Im(f)| = 3$:
  - Subkasus 1 : Jika $Im(f) = \{a,b,c\}$ dengan $a \in \{2,4\}$ dan $b,c \in \{1,3,5\}$.

    WLOG $a = 2, b = 1, c = 3$. Karena $f(f(x)) \in \{2,4\}$ dan $f(x) \in Im(f)$ untuk setiap x, sehingga $f(f(x)) = 2$ untuk setiap x. Lalu, karena ada x sehingga $f(x) = 1$ dan begitu juga untuk $f(x) = 2$ dan $f(x) = 3$, maka $f(1) = f(2) = f(3) = 2$. Lalu, $(f(4), f(5)) = (1,3)$ atau $(3,1)$.

    Maka dari itu, pada subkasus ini ada $\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot 2 = 12$ fungsi yang memenuhi.
  - Subkasus 2 : Jika $Im(f) = \{2,4,c\}$ dengan $c \in \{1,3,5\}$.

    WLOG $c = 1$, maka $Im(f) = \{1,2,4\}$. Karena $f(f(x)) \in \{2,4\}$, maka $f(1) \in \{2,4\}$. WLOG $f(1) = 2$. Maka, $f(2) \in \{2,4\}$

    * subsubkasus 1 : $f(2) = 2$, lalu cek $f(4) \in \{1,2,4\}$
      - jika $f(4) = 1$, maka $f(3) = 4$ atau $f(5) = 4$, maka $f(f(3)) = 1$ atau $f(f(5)) = 1$. (TM)
      - jika $f(4) = 2$, maka $\{f(3), f(5)\} = \{1,4\}$, ada 2 fungsi yang memenuhi
      - jika $f(4) = 4$, maka $f(3), f(5) \in \{1,2,4\}$ dengan syarat 1 memiliki prapeta. Maka, ada $3^2 - 2^2 = 5$ fungsi yang memenuhi

      Maka, ada $2 + 5 = 7$ fungsi di subsubkasus 1
    * subsubkasus 2 : $f(2) = 4$, maka $f(3) = 1$ atau $f(5) = 1$ sehingga ada 5 kemungkinan nilai $(f(3), f(5))$, yaitu $(2,1)$, $(4,1)$, $(1,2)$, $(1,4)$, dan $(1,1)$. Lalu, $f(4)$ dapat bernilai 2, atau 4. Maka, ada $5 \cdot 2 = 10$ fungsi yang memenuhi.

    Maka, pada subkasus ini terdapat $3 \times 2 \times (10 + 7) = 102$ fungsi yang memenuhi.
- Kasus 4 : $|Im(f)| = 4$:

  Misalkan $Im(f) = \{a,b,c,d\}$. Misal e bilangan yang tidak memiliki prapeta. Karena $f(f(x)) \in \{2,4\}$, jelas bahwa $f(a), f(b), f(c), f(d) \in \{2,4\}$.

  $$Im(f) = \{f(a), f(b), f(c), f(d), f(e)\} \subseteq \{2, 4, f(e)\}$$

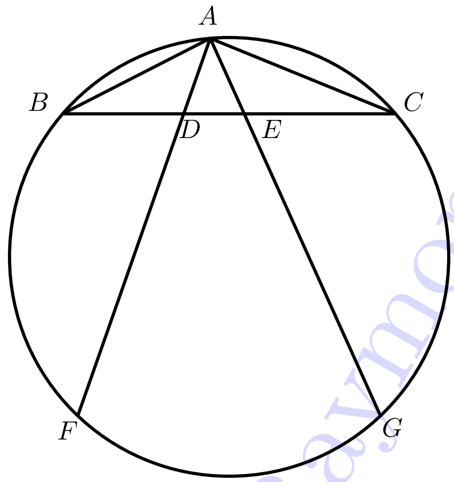
  Maka, $|Im(f)| \leq 3$. Kontradiksi, maka tak ada fungsi f yang memenuhi soal.
- Kasus 5 : $|Im(f)| = 5$: f merupakan fungsi bijeksi Maka, $f(f(x))$ juga merupakan fungsi bijeksi dan tidak memenuhi soal.

Jadi, total pemetaannya adalah $2 + 42 + 30 + 12 + 102 = \boxed{188}$.

20. Pada $\triangle ABC$, titik D dan E terletak pada sisi BC sehinggga B, D, E, C terletak pada urutan tersebut. Diketahui bahwa $BD : DE : EC = 4 : 2 : 5$ dan garis-garis AD dan AF membagi tiga $\angle BAC$ sama besar. Garis AD dan AE masing-masing memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ pada titik F dan G. Nilai

dari $\dfrac{DF}{EG}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{\dfrac{p}{q}}$ untuk suatu bilangan bulat positif p dan q yang saling relatif prima, nilai dari $p+q$ adalah ...

Solusi : Perhatikan gambar berikut ini.



WLOG $BD = 4, DE = 2, EC = 5$.
Karena AD garis bagi $\angle BAE$, maka $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BD}{DE} = 2$. Misalkan $AB = 2x$ dan $AE = x$.
Karena AE garis bagi $\angle DAC$, maka $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{EC} = \dfrac{2}{5}$. Misalkan $AD = 2y$ dan $AC = 5y$.
Lalu, dari fakta DA garis bagi $\angle BAE$, maka

$$\begin{aligned} AB \cdot AE - BD \cdot DE &= AD^2 \\ 2x \cdot x - 4 \cdot 2 &= (2y)^2 \\ x^2 - 4 &= 2y^2 \end{aligned}$$

Lalu, dari fakta EA garis bagi $\angle DAC$, maka

$$\begin{aligned} AD \cdot AC - DE \cdot EC &= AE^2 \\ 2y \cdot 5y - 2 \cdot 5 &= x^2 \\ 10y^2 - 10 &= x^2 \end{aligned}$$

Maka, kita punya $x^2 = \dfrac{30}{4}, y^2 = \dfrac{7}{4}$

Maka, $AD = 2y = \sqrt{7}$ dan $AE = x = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$

Dari Teorema PoP di titik D , didapat

$$AD \times DF = BD \times DC \implies \sqrt{7} \times DF = 4 \times 7 \implies DF = 4\sqrt{7} = 2\sqrt{28}$$

Dari Teorema PoP di titik E , didapat

$$AE \times DG = BE \times EC \implies \frac{\sqrt{30}}{2} \times EG = 6 \times 5 \implies DF = 2\sqrt{30}$$

Sehingga kita dapatkan

$$\frac{DF}{EG} = \frac{2\sqrt{28}}{2\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{14}{15}}$$

Sehingga $p = 14$ dan $q = 15$, maka $p + q = \boxed{29}$.